

2.2 Inverse d'une matrice

Définition 28 (inverse).

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Alors A est dite *invertible* s'il existe $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ telle que $AB = BA = I_n$.

Remarque

Si A est invertible, alors la matrice B telle que $AB = BA = I_n$ est unique. En effet,

Si A est invertible, sa matrice *inverse* est notée A^{-1} . Si A n'est pas invertible, elle est dite *singulière*.

Exemples

Formule pour une matrice 2×2

Théorème 17. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$. Alors, si $ad - bc \neq 0$, la matrice A est inversible et on a

Exemples

Preuve

Application aux systèmes d'équations linéaires

Théorème 18. *Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Si A est inversible, alors pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une unique solution $\vec{s}$, donnée par $\vec{s} = A^{-1}\vec{b}$.*

Exemple

Remarque

Il n'est pas nécessaire que A soit inversible pour que l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ admette une solution.

- Si A est inversible, alors la solution existe et est unique pour tout vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.
- Si A n'est pas inversible, alors le système peut être consistant ou inconsistent en fonction de $\vec{b}$.

Théorème 19. *Soient $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ des matrices inversibles. Alors*

1. A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.
2. AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
3. A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Preuve

Matrices élémentaires

But

Exprimer les opérations élémentaires sous forme matricielle et les utiliser pour trouver un algorithme permettant de calculer l'inverse d'une matrice.

Définition 29 (élémentaire).

Une matrice $E \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est dite *élémentaire* si elle s'obtient par une seule opération élémentaire sur les lignes de $I_n \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Opérations de type I

Pour $1 \leq i \neq j \leq n$, on note E_{ij} la matrice élémentaire obtenue en échangeant les lignes i et j de I_n .

Opérations de type II

Pour $1 \leq i \leq n$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on note $E_i(\alpha)$ la matrice élémentaire obtenue à partir de I_n en multipliant la i^e ligne par α .

Opérations de type III

Pour $1 \leq i \neq j \leq n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $E_{ij}(\alpha)$ la matrice élémentaire obtenue à partir de I_n en ajoutant la i^e ligne multipliée par α à la j^e ligne.

On a ainsi associé une matrice élémentaire à chaque opération élémentaire et on s'aperçoit que les opérations élémentaires effectuées sur une matrice A peuvent s'exprimer par le produit de A avec les matrices élémentaires correspondantes.

Exemple

Théorème 20. *Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Si E est une matrice élémentaire obtenue de I_m avec une seule opération élémentaire, alors EA est une matrice de $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ obtenue à partir de A avec la même opération élémentaire.*

Remarque

Théorème 21. *Les matrices élémentaires sont inversibles.*

Algorithme pour trouver A^{-1}

Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice inversible d'inverse A^{-1} . Alors on a $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Affirmation : La forme échelonnée réduite de A est I_n .

Conséquence :

En utilisant l'algorithme de Gauss-Jordan pour résoudre $A\vec{x}_i = \vec{e}_i$, on obtient

Remarque :**Exemple**

Théorème 22. *Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ une matrice. Alors A est inversible si et seulement si on peut passer de A à I_n moyennant l'algorithme de Gauss-Jordan.*

Dans ce cas, toute suite d'opérations élémentaires transformant A en I_n transformera I_n en A^{-1} .

On peut résumer les résultats obtenus jusqu'à présent dans le théorème suivant :

Théorème 23. *Soit $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *La matrice A est inversible*
2. *Pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une unique solution donnée par $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$*
3. *Les colonnes de la matrice A engendrent $\mathbb{R}^n$*
4. *La matrice A possède un pivot par ligne*
5. *Les colonnes de A sont linéairement indépendantes*
6. *L'équation homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale*
7. *On peut passer de A à I_n avec l'algorithme de réduction*
8. *La matrice A est un produit de matrices élémentaires*
9. *L'application linéaire $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ associée à A est surjective*
10. *L'application linéaire $T_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ associée à A est injective*
11. *La matrice A^T est inversible*

Remarques